Е. А. Уткина

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

eutkina1@yandex.ru

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассматривается задача Неймана для уравнения

$$L(u) = D_x^2 D_y^2 u(x,y) + \sum_{\substack{i=0 \\ i+j<4}}^{2} \sum_{j=0}^{2} a_{ij}(x,y) D_x^i D_y^j u(x,y) = f(x,y). \tag{1}$$

которое является обобщением уравнения Буссинеска — Лява [1], описывающего продольные волны в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции. Используем обозначения из [1]: $D_t^k \varphi \equiv \partial^k \varphi / \partial t^k$ при $k = 1, 2, \ldots$ и D_t^0 — оператор тождественного преобразования.

Пусть $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1\}$, $p = [0, y_1]$, $q = [0, x_1]$, и при этом $a_{ij} \in C^{i,j}\left(\overline{D}\right)$, $f \in C^{0,0}\left(\overline{D}\right)$.

Задача: *найти функцию* $u(x,y) \in C^{2,2}(D) \cap C^{1,0}(D \cup p) \cap C^{0,1}(D \cup q) \cap C^{1,1}\left(\overline{D}\right)$, *являющуюся в* D *решением уравнения* (1) *и удовлетворяющую условиям*

$$u_x(0,y) = \varphi_1(y), \quad u_y(x,0) = \psi_1(x) \tag{2}$$

$$u_x(x_1,y) = \varphi_2(y), u_y(x,y_1) = \psi_2(x). \tag{3}$$

Из принадлежности $u(x,y)$ классу $C^{1,1}\left(\overline{D}\right)$ следуют соотношения

$$\varphi_1'(y_1) = \psi_2'(0),\ \varphi_1'(0) = \psi_1'(0),\ \psi_1'(x_1) = \varphi_2'(0),\ \varphi_2'(y_1) = \psi_2'(x_1).$$

С целью обоснования единственности решения докажем, что при однородных условиях (2), (3) однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение. Доказательство осуществляем методом априорной оценки с помощью энергетического неравенства [2].

Воспользуемся понятиями скалярного произведения и нормы в пространстве $L_2\left\{[0,x_1]\times[0,y_1]\right\}$:

$$(u,v)=\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}u\left(x,y\right)v\left(x,y\right)dydx,\ \ \|u\|^2=\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}u^2\left(x,y\right)dydx.$$

Вычислим скалярное произведение

$$\left(L\left(u\right),u\right)=(D_x^2D_y^2u+\sum_{\substack{i=0\\ i+j<4}}^{2}\sum_{j=0}^{2}a_{ij}\left(x,y\right)D_x^iD_y^ju,u)=$$
$$=\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(D_x^2D_y^2u\cdot u+\sum_{\substack{i=0\\ i+j<4}}^{2}\sum_{j=0}^{2}a_{ij}D_x^iD_y^ju\cdot u)\left(x,y\right)dydx.$$

С помощью интегрирования по частям перепишем это соотношение в виде

$$\left(L\left(u\right),u\right)=\|u_{xy}\|^2+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(\frac{a_{20xx}\left(x,y\right)}{2}+$$
$$+\frac{a_{02yy}\left(x,y\right)}{2}-\frac{a_{10x}\left(x,y\right)}{2}-\frac{a_{01y}\left(x,y\right)}{2}+a_{00}\left(x,y\right))u^2\left(x,y\right)dydx+$$
$$+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(\frac{a_{21y}\left(x,y\right)}{2}-a_{20}\left(x,y\right))u_x^2\left(x,y\right)dydx+$$
$$+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(\frac{a_{12x}\left(x,y\right)}{2}-a_{02}\left(x,y\right))u_y^2\left(x,y\right)dydx+$$
$$+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}((-a_{12y}-a_{21x}+a_{11})uu_{xy})(x,y)dydx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}((a_{21}u_x^2)(x,y_1)-(a_{21}u_x^2)(x,0))dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^{y_1}((a_{12}u_y^2)(x_1,y)-$$

$$-(a_{12}u_y^2)(0,y))dy-\int\limits_0^{y_1}((a_{20x}u^2)(x_1,y)-(a_{20x}u^2)(0,y))dy-$$

$$-\int\limits_0^{x_1}((a_{02y}u^2)(x,y_1)-(a_{02y}u^2)(x,0))dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^{y_1}((a_{10}u^2)(x_1,y)-$$

$$-(a_{10}u^2)(0,y))dy+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}((a_{01}u^2)(x,y_1)-(a_{01}u^2)(x,0))dx.$$

Функции $a_{ij}(x,y)$ непрерывны на компакте, поэтому достигают своих точных верхних и нижних граней. Обозначим $\sup\limits_{(x,y)\in D} a_{ij}(x,y)=sa_{ij}$, $\inf\limits_{(x,y)\in D} a_{ij}(x,y)=ia_{ij}$. Используем неравенства Коши — Буняковского $|(u,v)|\leqslant\|u\|\cdot\|v\|$, а также Коши "с ε": $|a\cdot b|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}|a|^2+\frac{|b|^2}{2\varepsilon}$, справедливое при любом $\varepsilon>0$. Учитывая, что $(L(u),u)=(f,u)\leqslant\varepsilon\|f\|^2+\|u\|^2/(4\varepsilon)$ для любого $\varepsilon>0$, получим

$$\varepsilon\|f\|^2\geqslant\|u_{xy}\|^2\,(\frac{1}{2})+\|u\|^2\,(\frac{ia_{20xx}}{2}+\frac{ia_{02yy}}{2}-\frac{sa_{10x}}{2}-\frac{sa_{01y}}{2}+$$

$$+ia_{00}-\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{(sa_{21x})^2}{2}-\frac{(sa_{11})^2}{2}-\frac{(sa_{12y})^2)}{2}+(\frac{ia_{21y}}{2}-sa_{20})\left\|u_x^2\right\|+$$

$$+(\frac{ia_{12x}}{2}-sa_{02})\left\|u_y^2\right\|-\frac{1}{2}sa_{21}\int\limits_0^{x_1}u_x^2(x,y_1)dx+\frac{1}{2}ia_{21}\int\limits_0^{x_1}u_x^2(x,0)dx-$$

$$-\frac{1}{2}sa_{12}\int\limits_0^{y_1}u_y^2(x_1,y)dy+\frac{1}{2}ia_{12}\int\limits_0^{y_1}u_y^2(0,y)dy+$$

$$+(-sa_{20x}+\frac{1}{2}ia_{10})\int\limits_0^{y_1}u^2(x_1,y)dy+(ia_{20x}-\frac{1}{2}sa_{10})\int\limits_0^{y_1}u^2(0,y)dy+$$

$$+(-sa_{02y}+\frac{1}{2}ia_{01})\int\limits_0^{x_1}u^2(x,y_1)dx+(ia_{02y}-\frac{1}{2}sa_{01})\int\limits_0^{x_1}u^2(x,0)dx.$$

Потребуем неотрицательности коэффициентов при нормах и интегралах:

$$\frac{ia_{20xx}}{2}+\frac{ia_{02yy}}{2}-\frac{sa_{10x}}{2}-\frac{sa_{01y}}{2}+ia_{00}-\frac{1}{4\varepsilon}-$$
$$-\frac{(sa_{21x})^2}{2}-\frac{(sa_{11})^2}{2}-\frac{(sa_{12y})^2}{2}\geqslant 0,$$

$\frac{ia_{21y}}{2}-sa_{20}\geqslant 0$, $\frac{ia_{12x}}{2}-sa_{02}\geqslant 0$, $-sa_{21}\geqslant 0$, $ia_{21}\geqslant 0$, $-sa_{12}\geqslant 0$, $ia_{12}\geqslant 0$, $-sa_{20x}+\frac{1}{2}ia_{10}\geqslant 0$, $ia_{20x}-\frac{1}{2}sa_{10}\geqslant 0$, $-sa_{02y}+$ $+\frac{1}{2}ia_{01}\geqslant 0$, $ia_{02y}-\frac{1}{2}sa_{01}\geqslant 0$.
При этом оказывается, что $a_{21}\equiv a_{12}\equiv 0$, $a_{02}\leqslant 0$, $a_{20}\leqslant 0$, значит,

$$\frac{ia_{20xx}}{2}+\frac{ia_{02yy}}{2}-\frac{sa_{10x}}{2}-\frac{sa_{01y}}{2}+ia_{00}-\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{(sa_{11})^2}{2}\geqslant 0.$$

Кроме того, $\frac{1}{2}ia_{10}\geqslant sa_{20x}\geqslant ia_{20x}\geqslant\frac{1}{2}sa_{10}$, $\frac{1}{2}ia_{01}\geqslant sa_{02y}\geqslant$ $\geqslant ia_{02y}\geqslant\frac{1}{2}sa_{01}$, и это означает, что точная нижняя грань функции не меньше точной верхней, следовательно, в неравенствах могут достигаться только равенства, то есть

$$\frac{1}{2}a_{10}=a_{20x}=\mathrm{const},\ \frac{1}{2}a_{01}=a_{02y}=\mathrm{const}. \qquad (4)$$

Поэтому $ia_{00}\geqslant(4\varepsilon)^{-1}+(sa_{11})^2/2$. В силу произвольности ε получим, что $ia_{00}\geqslant(sa_{11})^2/2$.

Полагаем теперь $f\equiv 0$, вследствие чего функция u может быть только нулевой.

Таким образом, имеет место

Теорема. *Если коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (4), *а также* $ia_{00} \geqslant (sa_{11})^2/2$, $a_{20} \leqslant 0$, $a_{02} \leqslant 0$, $a_{21} \equiv a_{12} \equiv 0$, *то задача* (1) – (3) *имеет единственное решение.*

Условия теоремы являются существенными, подтверждением чего может служить задача для уравнения $u_{xxyy}+u_{xx}=0$ в области $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$ с условиями $u_x(0,y)=0$, $u_x(\pi,y)=0$, $u_y(x,0)=0$, $u_y(x,\pi)=0$. Здесь коэффициент $a_{20}=1>0$, а все остальные равны нулю, то есть условие теоремы не выполнено. Решением является функция $u(x,y)=\cos x\cdot\cos y$, отличная от тождественного нуля в области D.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А.Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 3. – С. 547-552.

2. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* – М.: Наука, 1973. – 408 с.